

No.3 選択公理

この回のゴール

- 選択公理を、選択関数と直積の言葉で述べられる。
- これまでの回で選択公理が使われていた場所を指摘できる。
- 選択公理・ツォルンの補題・整列可能定理が同値であることの概略を説明できる。
- 選択公理から導かれる「直観に反する」結果と、選択公理の位置づけを知る。

■ 1. 選択公理とは

第 2 章 No.3 と第 3 章 No.1 で、「無限個の集合から、いっせいに 1 つずつ要素を選ぶ」ことが必要な場面があった。これを保証するのが選択公理である。

定義 1 選択関数

空でない集合からなる集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、写像

$$\varphi: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \quad \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ で } \varphi(\lambda) \in A_\lambda$$

を $\{A_\lambda\}$ の**選択関数**という。(各 A_λ から要素 $\varphi(\lambda)$ を 1 つずつ「選んでいる」.)

選択公理

空でない集合からなる任意の集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ には、選択関数が存在する。これを**選択公理** (Axiom of Choice, 略して AC) という。

選択公理は「定理」ではなく、証明なしに認める**公理**である。ふだんの数学の土台となる公理系 ZF (ツェルメロ-フレンケルの公理系) に選択公理を加えたものを ZFC という (第 1 章 No.1 のコラム)。

直積による言い換え 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積**を、選択関数全体の集合として定める。

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \left\{ \varphi: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda} A_\lambda \mid \text{すべての } \lambda \text{ で } \varphi(\lambda) \in A_\lambda \right\}.$$

$\Lambda = \{1, 2\}$ なら、 φ を組 $(\varphi(1), \varphi(2))$ と同一視すれば $A_1 \times A_2$ にもどる (第 1 章 No.1 定義 8)。この言葉では、選択公理は次のように言える。

$$\text{すべての } \lambda \text{ で } A_\lambda \neq \emptyset \text{ ならば } \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

「空でない集合をいくつ掛けても空にならない」という、当たり前に見える主張である。

■ 2. 選択公理がいる場合・いない場合

選択公理がなくても「選べる」場合が多い.

- 有限個の空でない集合からは, 1 つずつ選べる (集合の個数についての帰納法).
- 選び方の規則が書ければ, 選択公理はいらない. たとえば $\mathbb{N}$ の空でない部分集合の族なら「最小値を選ぶ」, $\mathbb{R}$ の开区間 (a, b) の族なら「中点 $\frac{a+b}{2}$ を選ぶ」という規則がある.

選択公理が本当に必要になるのは, 無限個の集合から, 規則なしに選ぶときである. たとえば「 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合すべてから 1 つずつ選ぶ」ことは, ZF だけでは証明できないことが知られている (最小値は存在するとは限らず, 代わりの規則も見つからない).

例 1 ラッセルの靴と靴下

無限組の靴があれば, 各組から「左の靴」を選ぶという規則で, 選択公理なしに選べる. しかし無限組の靴下では, 左右の区別がないので規則が作れず, 選択公理が必要になる. (無限組の靴下から 1 つずつ選べることも, ZF だけでは証明できないことが知られている.)

このシリーズで選択公理を使っていた場所

- 第 2 章 No.3 定理 5 (2): 全射には右逆写像がある. (各 $f^{-1}(\{b\})$ から 1 つずつ選ぶ.)
- 第 3 章 No.1 定理 3 (4): 可算個の高々可算集合の和集合は高々可算. (各 A_n の並べ方 g_n を 1 つずつ選ぶ.)
- 第 4 章 No.2 のツォルンの補題を使ったすべての証明 (ベクトル空間の基底の存在など). 定理 1 で見ると, ツォルンの補題は選択公理と同値である.

ほかにも, 「無限集合は可算な部分集合をもつ」ことや, 「任意の 2 つの集合の濃度は比較できる ($|A| \leq |B|$ または $|B| \leq |A|$)」ことの証明に選択公理が使われる.

■ 3. 選択公理と同値な命題

第 4 章 No.1 で予告した整列可能定理を, 改めて述べておく.

整列可能定理

どんな集合 X にも, $(X, \leq)$ が整列集合になるような全順序 $\leq$ が存在する. この主張を整列可能定理という.

定理 1

次の 3 つは (ZF のもとで) 互いに同値である.

- (1) 選択公理
- (2) ツォルンの補題 (No.2 定理 1)
- (3) 整列可能定理

ここでは (2) $\Rightarrow$ (1), (3) $\Rightarrow$ (1), (2) $\Rightarrow$ (3) を示す. (1) $\Rightarrow$ (2) の証明は長くなるので省略し, 教科書に任せる (あとで考え方だけ紹介する).

【証明】(3) $\Rightarrow$ (1): 空でない集合の族 $\{A_\lambda\}$ に対して, $X = \bigcup_\lambda A_\lambda$ に整列順序 $\leq$ を入れる. 各 A_λ は X の空でない部分集合なので最小元をもつ. $\varphi(\lambda) = \min A_\lambda$ とすれば選択関数になる. («最小値を選ぶ»

という規則が、整列順序のおかげでどんな集合族にも使えるようになる.)

(2) $\Rightarrow$ (1): No.2 例題 1 と同じ型で示す. $\Gamma \subset \Lambda$ と, 部分族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ の選択関数 ψ の組 (Γ, ψ) 全体を $\mathcal{A}$ とし, 延長で順序づける. $(\emptyset, \text{空写像}) \in \mathcal{A}$ で, 鎖の上界は「和をとって貼り合わせたもの」で作れるので, $\mathcal{A}$ は帰納的. ツォルンの補題より極大元 (Γ, ψ) がある. $\Gamma \neq \Lambda$ なら, $\lambda_0 \in \Lambda \setminus \Gamma$ と $a_0 \in A_{\lambda_0}$ を 1 つだけ選んで延長でき, 極大性に反する. よって $\Gamma = \Lambda$ で, ψ が選択関数である.

(2) $\Rightarrow$ (3) (概略): X の部分集合 W と, W 上の整列順序 $\leq_W$ の組 $(W, \leq_W)$ 全体を $\mathcal{A}$ とする. $(W, \leq_W) \preceq (W', \leq_{W'})$ を, 「 $W \subset W'$, $\leq_{W'}$ を W に制限すると $\leq_W$ になり, しかも $W' \setminus W$ の要素は W のすべての要素より大きい」(W' は W の後ろに要素を付け足したもの) と定める. 鎖の和集合 W^* に, 順序をつなぎ合わせた $\leq^*$ を入れると整列順序になる (W^* の空でない部分集合 S の要素 s をとり, s を含む W の中で $S \cap W$ の最小元をとると, 「後ろに付け足す」約束から, それが S の最小元になる). よって $\mathcal{A}$ は帰納的で, 極大元 $(W, \leq_W)$ がある. $W \neq X$ なら, $x \in X \setminus W$ を W の一番後ろに付け足した $W \cup \{x\}$ も整列集合で, 極大性に反する. よって $W = X$. $\square$

コラム: (1) $\Rightarrow$ (2) の考え方

ツォルンの補題を背理法で示す. 帰納的な A に極大元がないとすると, どんな鎖 C にも上界 u があり, u は極大でないので $u < v$ となる v がある. つまり「 C のすべての要素より真に大きい要素」が必ずある. 選択公理を使って, 各鎖 C にそのような要素 $g(C)$ を 1 つずつ対応させておく. そして a_0 から始めて, $a_1 = g(\{a_0\})$, $a_2 = g(\{a_0, a_1\})$, $\dots$ と, 鎖を真に長くし続ける. 自然数の番号を使い切っても, それまでの全体の鎖にまた g を使って先へ進める. これを (順序数という「無限の先まで続く番号」を使って) どこまでも続けると, やがて A の要素より「長い」鎖ができてしまい, 矛盾する. この「どこまでも続ける」部分を厳密にするのが, 証明の長いところである.

例題 1

選択公理を使って, 「全射 $f: A \rightarrow B$ が存在するならば $|B| \leq |A|$ 」を示せ.

【解答】 f は全射なので, 各 $b \in B$ について $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$. 選択公理より, 集合族 $\{f^{-1}(\{b\})\}_{b \in B}$ の選択関数 $h: B \rightarrow \bigcup_b f^{-1}(\{b\}) \subset A$ がある. $h(b) \in f^{-1}(\{b\})$, すなわち $f(h(b)) = b$ なので, $f \circ h = \text{id}_B$. よって h は左逆写像 f をもつので単射 (第 2 章 No.3 定理 5 (1)) で, $|B| \leq |A|$.

■ 4. 選択公理のふしぎな帰結

選択公理は「当たり前」に見えるが, 直観に反する結果も導く. その代表例を紹介する.

長さを測れない集合 (ヴィタリ集合) $[0, 1)$ 上で, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ と定めると同値関係になる (第 4 章 No.1). 各同値類は可算集合で, 同値類は非可算個ある. 選択公理を使って, 各同値類から 1 つずつ代表元を選び, それらを集めた集合を V とする. $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ に対して, V を q だけずらして, 1 をはみ出した部分を 1 だけ戻した集合を V_q とすると,

- V_q たちは互いに交わらず, その和集合は $[0, 1)$ である (練習問題 6).
- V_q はすべて V を「ずらして切り貼りした」ものなので, V と同じ長さをもつはずである.

V の長さを ℓ とすると, $[0, 1)$ の長さ 1 は可算個の ℓ の和 $\ell + \ell + \ell + \dots$ になるはずだが, $\ell = 0$ なら和は 0, $\ell > 0$ なら和は ∞ で, どちらも 1 にならない. つまり V には, 「ずらしても変わらない」「可算個に分けたら和になる」という長さの性質を保ったまま, 長さを割り当てることができない. これが, ルベーク測度で測れない集合 (非可測集合) の例である (分野「解析学」第 8 章 No.1).

コラム：バナッハ-タルスキのパラドックス

選択公理を使うと、次のことが証明できる。3次元の球を有限個（5個）の部分に分けて、それらを回転・平行移動だけで組み直すと、元と同じ大きさの球が2つできる。もちろん現実の物体ではありえない。分けた部分がヴィタリ集合のように「体積を測れない」ほど複雑な集合になるので、体積が保たれなくてもおかしくないのである。選択公理は「存在」だけを保証し、その中身を見せてはくれない。だからこそ、こうした想像を超える対象まで存在してしまうのである。

■ 5. 選択公理の位置づけ

選択公理は1904年にツェルメロが整列可能定理を証明するために明示的に使い、当時は大論争になった。その後、次のことが明らかになった。

- ゲーデル（1938年）：ZFが矛盾しないなら、ZFに選択公理を加えたZFCも矛盾しない。
- コーエン（1963年）：ZFが矛盾しないなら、ZFに「選択公理の否定」を加えても矛盾しない。

つまり、**選択公理はZFの他の公理から独立**であり、認めるかどうかは「選ぶ」ものである。現代の数学者の多くは選択公理を認めて使っている。基底の存在や極大イデアルの存在などがないと、多くの理論が不便になるからである。一方で、選択公理を使った証明は具体的な対象を作ってくれないので、「選択公理なしで証明できるか」を気にすることも大切である。

この回で、集合論の4章が終わる。集合・写像・濃度・順序の言葉は、これから学ぶすべての分野で使われる。迷ったら、いつでもこの分野にもどってこよう。

■ 練習問題

発展 のついた問題は、この回の内容から一步踏み出した発展問題である。最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい。

- 次の「1 つずつ選ぶ」操作のうち、選択公理がなくても（規則を書いて）実行できるものはどれか。規則も答えよ。
 - (1) 空でない集合 A_1, A_2, A_3 から 1 つずつ
 - (2) $\mathbb{N}$ の空でない部分集合すべてから 1 つずつ
 - (3) $\mathbb{R}$ の空でない閉区間 $[a, b]$ ($a < b$) すべてから 1 つずつ
 - (4) $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合すべてから 1 つずつ
 - (5) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合すべてから 1 つずつ
- 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ($\Lambda \neq \emptyset$) のどれか 1 つが空集合ならば、 $\prod_\lambda A_\lambda = \emptyset$ であることを示せ。
- 整列可能定理を使って、 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合すべてから 1 つずつ要素を選ぶ方法を説明せよ。また、その方法が具体的な「規則」にならないのはなぜか。
- 第 3 章 No.1 定理 3 (4) で、すべての A_n が $\mathbb{N}$ の部分集合であるときは、選択公理を使わずに証明できる。その理由を説明せよ。
- (考えてみよう) 選択公理を使って、「無限集合 X は可算な部分集合をもつ」ことを示せ。(ヒント: X の空でない部分集合全体の選択関数 φ を使い、 $x_1 = \varphi(X)$, $x_2 = \varphi(X \setminus \{x_1\})$, ……と定める.)
- 発展** (考えてみよう) 本文のヴィタリ集合 V について、 $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ に対して

$$V_q = \{v + q \mid v \in V, v + q < 1\} \cup \{v + q - 1 \mid v \in V, v + q \geq 1\}$$

とおく。 $q \neq q'$ なら $V_q \cap V_{q'} = \emptyset$ であること、および $\bigcup_q V_q = [0, 1)$ であることを示せ。

■ 練習問題の解答

1. (1) できる. 有限個なので, 1 つずつ順に選べばよい.
 (2) できる. 「最小値を選ぶ」.
 (3) できる. 「中点 $\frac{a+b}{2}$ を選ぶ」 (または「左端 a を選ぶ」).
 (4) できる. $\mathbb{Q}$ は可算なので, 全単射 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ を 1 つ固定し, その番号が最小のものを選ぶ.
 (5) 選択公理なしではできない (ZF だけでは証明できないことが知られている). ($\mathbb{Q}$ の場合 (4) と違い, $\mathbb{R}$ は非可算で, 番号づけが使えない.)
2. $A_{\lambda_0} = \emptyset$ とする. $\varphi \in \prod_{\lambda} A_{\lambda}$ があれば $\varphi(\lambda_0) \in A_{\lambda_0} = \emptyset$ となり矛盾. よって $\prod_{\lambda} A_{\lambda} = \emptyset$.
3. 整列可能定理より, $\mathbb{R}$ に整列順序 $\preceq$ が存在する. 空でない $S \subset \mathbb{R}$ に対して, S の $\preceq$ での最小元を選べばよい. しかし, 整列可能定理は $\preceq$ が「存在する」ことしか言わず, $\preceq$ を具体的に書き下す方法は知られていない (ふつうの $\leq$ は整列順序でない). そのため「この集合からはこれを選ぶ」と具体的に答えることはできない.
4. $A_n \subset \mathbb{N}$ なら, 空でない A_n について「 A_n の要素を小さい順に並べる」 (有限なら最後の要素をくり返す) という規則で g_n を決められる. すべての n について同じ規則で決まるので, 選択公理はいらない. (証明の (2) で使った「 $\min f^{-1}(\{a\})$ 」も, $\mathbb{N}$ の整列性による規則である.)
5. X の空でない部分集合全体 $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に選択関数 φ がある (選択公理). $x_1 = \varphi(X)$, $x_{n+1} = \varphi(X \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ と定める. X は無限集合なので, $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ はつねに空でなく, x_{n+1} が定まる. 作り方から $x_{n+1} \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ なので x_n はすべて異なり, $\{x_1, x_2, \dots\}$ は X の可算部分集合である.
6. 各 $v \in V$, q について, V_q の要素は $v + q$ を「1 以上なら 1 を引いた」もので, $[0, 1)$ に入り, v と同値 (差が有理数) である.
交わらない: $x \in V_q \cap V_{q'}$ とすると, $x = v + q - \varepsilon = v' + q' - \varepsilon'$ ($v, v' \in V$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$).
 $v - v' = (q' - \varepsilon') - (q - \varepsilon) \in \mathbb{Q}$ なので $v \sim v'$. V は各同値類から 1 つずつ選んだ集合なので $v = v'$.
 すると $q - \varepsilon = q' - \varepsilon'$ で, $q, q' \in [0, 1)$ より $|q - q'| < 1$, $q - q' = \varepsilon - \varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$ なので $q = q'$.
覆う: $x \in [0, 1)$ とする. x の同値類の代表元 $v \in V$ をとると $x - v \in \mathbb{Q}$, $-1 < x - v < 1$.
 $x - v \geq 0$ なら $q = x - v$ とおけば $x = v + q \in V_q$. $x - v < 0$ なら $q = x - v + 1 \in [0, 1)$ とおけば $v + q = x + 1 \geq 1$ で, $x = v + q - 1 \in V_q$.